Maths XP DM $n°3$ Fin décembre 2024 **M. Thiaude P.**
À faire par groupe de 2 ou bien 3 élèves, une seule copie. **DL=20/12/24**

<u>Problème</u>

(a_n) et (b_n) sont les suites définies par $a_0 = b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n + 1 \text{ et } b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Donner U_0 puis déterminer U_1 et U_2.

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$U_{n+1} = AU_n + B$.

3. Montrer que la matrice $(I - A)$ est inversible et déterminer $(I - A)^{-1}$, en déduire la matrice colonne C vérifiant : $C = AC + B$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = U_n - C$.

a. Vérifier que : $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$ et que**,** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

b. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0, $n \in \mathbb{N}$.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. On pose $D = P^{-1}AP$, vérifier que $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. Donner sans justification D^n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1)$$
$$b_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3)$$

7. Un élève affirme : « si n est pair alors $a_n = b_n$, sinon $a_n = b_n + 1$ ».
Si cette affirmation est fausse en donner un contre-exemple, sinon la démontrer.

Corrigé

$a_0 = b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n + 1$ et $b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$,
$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

1. • $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{U_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

• $a_1 = 2a_0 + 3b_0 + 1 = 2(1) + 3(1) + 1 = 6$ et $b_1 = 3a_0 + 2b_0 = 3 + 2 = 5$

donc : $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$.

• $a_2 = 2a_1 + 3b_1 + 1 = 2(6) + 3(5) + 1 = 12 + 15 + 1 = 28$

et $b_2 = 3a_1 + 2b_1 = 3(6) + 2(5) = 18 + 10 = 28$

donc : $\boldsymbol{U_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{28} \\ \mathbf{28} \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3b_n + 1 \\ 3a_n + 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3b_n \\ 3a_n + 2b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = AU_n + B$$

<u>Conclusion</u> : **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$.**

3. Montrer que la matrice $\boldsymbol{(I - A)}$ est inversible et déterminer $\boldsymbol{(I - A)^{-1}}$, en déduire la matrice colonne $\boldsymbol{C}$ vérifiant : $\boldsymbol{C = AC + B}$.

On a : $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-3 \\ 0-3 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

donc : $\det(I - A) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) - (-3)(-3) = 1 - 9 = -8$.

On constate que $\det(I - A) \neq 0$ donc $I - A$ est inversible, et on a :

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I - A)} \begin{pmatrix} -1 & +3 \\ +3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -1 & +3 \\ +3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow IC - AC = B \Leftrightarrow (I - A)C = B$$
$$\Leftrightarrow (I - A)^{-1}(I - A)C = (I - A)^{-1}B \Leftrightarrow IC = (I - A)^{-1}B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$$

on a :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - 0 \\ -\frac{3}{8} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{8}} \\ -\mathbf{\frac{3}{8}} \end{pmatrix}$$

4. **Pour tout entier naturel n on pose : $V_n = U_n - C$.**

   a. **Vérifier que : $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$ et que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.**

   • vérifions que $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$

   On a :

$$V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

   On a donc bien : $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$.

   • Vérifions que, pour tout entier naturel n on a : $V_{n+1} = AV_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a : $AV_n = A(U_n - C) = AU_n - AC = AU_n - (C - B) = AU_n - C + B = AU_n + B - C$.

   Or, $AU_n + B = U_{n+1}$, donc : $AV_n = U_{n+1} - C = V_{n+1}$.

   <u>Conclusion</u> pour tout entier naturel n : $V_{n+1} = AV_n$.

   b. **Exprimons V_n en fonction de A^n et V_0.**

   Pour tout entier naturel n, on note P_n la proposition : $V_n = A^n V_0$.

   • <u>initialisation</u>

   $V_0 = IV_0 = A^0 V_0$ donc P_0 est vraie

   • <u>hérédité</u>

   Supposons que P_k : « $V_k = A^k V_0$ » est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $V_{k+1} + A^{k+1} V_0$ » est vraie.

   On a : $V_{k+1} = AV_k$ (d'après **a.**) $= A \times A^k V_0$ (d'après l'hypothèse de récurrence) $= A^{k+1} V_0$

   On a $V_{k+1} = A^{k+1} V_0$ donc P_{k+1} est vraie.

   <u>Conclusion</u>

   Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = A^n V_0$.

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a. **Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.**

   $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$

   On constate que $\det(P) \neq 0$ donc P est inversible, et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   b. **On pose $D = P^{-1}AP$, vérifier que $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.**

   On a :

$$P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+3 & 3+2 \\ -2+3 & -3+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

puis :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+5 & -5+5 \\ 1-1 & -1-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien : $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{A^n = PD^nP^{-1}}$.

On a les équivalences :

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = APP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = A$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

• <u>initialisation</u>

$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ donc $A^0 = PD^0P^{-1}$: P_0 est vraie

• hérédité

Supposons vraie P_k : $A^k = PD^kP^{-1}$ pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} est vraie.

On a :

$A^{k+1} = A \times A^k = A \times PD^kP^{-1} = PDP^{-1}PD^kP^{-1} = PDID^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$

Finalement : $A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$ autrement dit P_{k+1} est vraie.

<u>**Conclusion**</u>

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A^n = PD^nP^{-1}}$.

d. Donner $\boldsymbol{D^n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ puis, montrer que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}}$$

D est une matrice diagonale donc D^n s'obtient immédiatement :

$$\boldsymbol{D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}$$

d'où :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & -(-1)^n \\ 5^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

puis :

$$PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n & -(-1)^n \\ 5^n & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

On a donc finalement :

$$\boldsymbol{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}}$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1)}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3)}$$

• Forme explicite de $\boldsymbol{V_n}$, puis de $\boldsymbol{U_n}$

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = A^nV_0$. En utilisant la forme explicite de A^n, on obtient :

$$V_n = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

puis :

$$U_n = V_n + C = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{16}\left[\begin{pmatrix} 18 \times 5^n - 4 \times (-1)^n \\ 18 \times 5^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 18 \times 5^n - 4 \times (-1)^n + 2 \\ 18 \times 5^n + 4 \times (-1)^n - 6 \end{pmatrix}$$

$$U_n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1 \\ 9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3 \end{pmatrix}$$

Or, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc : $a_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1)$ et $b_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3)$

On en déduit que, **pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$:**

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1)}$$
$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3)}$$

7. Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n - b_n = \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 2 \times (-1)^n + 1) - \frac{1}{8}(9 \times 5^n + 2 \times (-1)^n - 3)$$
$$= \frac{1}{8}(9 \times 5^n - 9 \times 5^n - 2(-1)^n - 2(-1)^n + 1 + 3) = \frac{1}{8}((-1)^n(-4) + 4)$$
$$= \frac{4}{8}(-(-1)^n + 1) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

• si n est pair, alors $(-1)^n = 1$, donc : $a_n - b_n = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

par conséquent $a_n = b_n$

• si n est impair, alors : $(-1)^n = -1$, donc :

$$a_n - b_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

<u>Conclusion</u>

Si n est pair,alors $a_n = b_n$ et si n est impair, alors $a_n = b_n + 1$ par conséquent **l'affirmation de l'élève est exacte**.